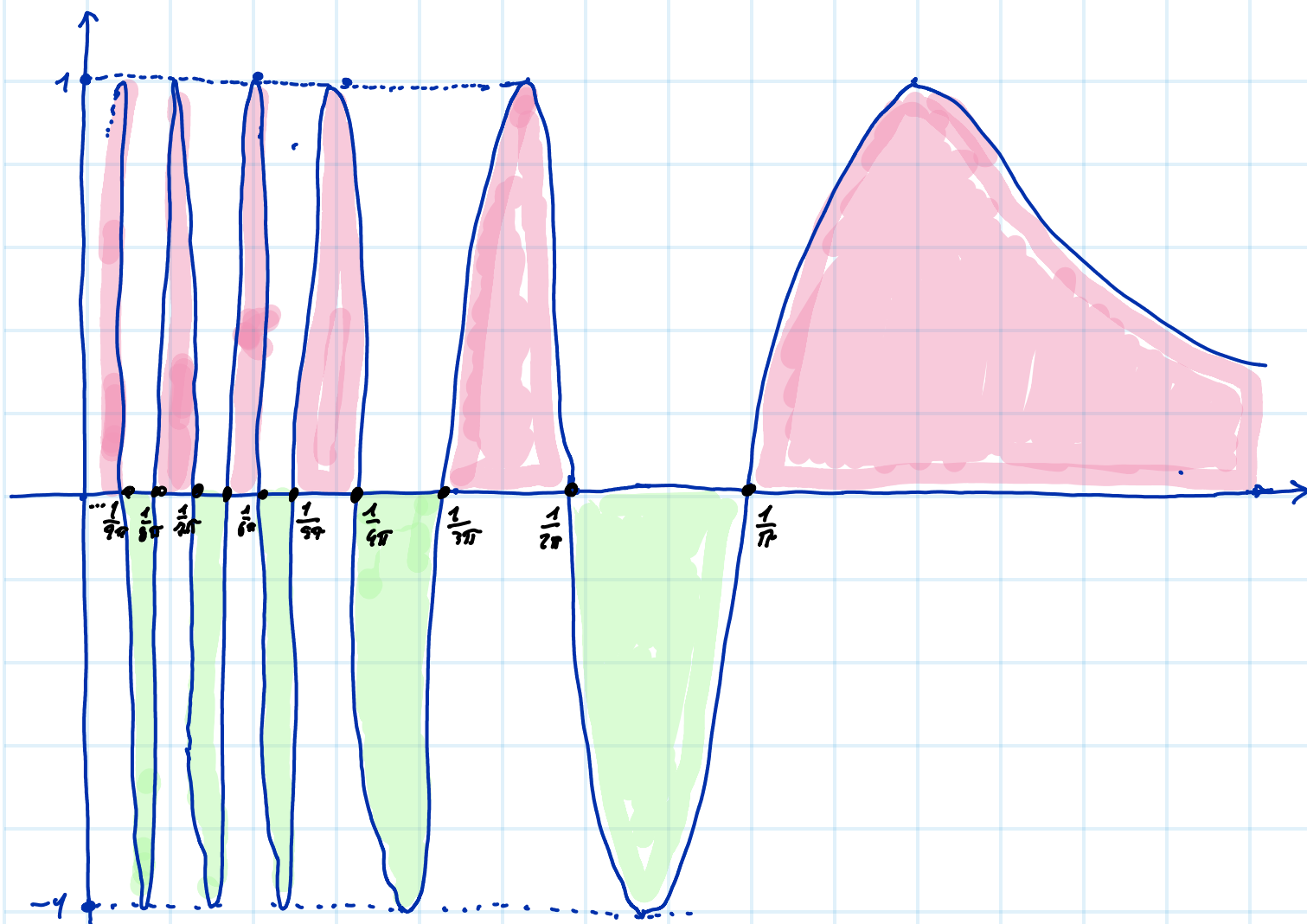


PROBLEMA

CALCOLARE, AL VARIARE DI $\alpha > 0$, IL LIMITE $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x^\alpha}$, DOVE $F(x) = \int_0^x \sin \frac{1}{t} dt$

SVOLGIMENTO

IL GRAFICO DELLA FUNZIONE INTEGRANDA È IL SEGUENTE:



NOTIAMO CHE $f(t)$ SI ANNULLA PER $t = \frac{1}{n\pi}$ CON $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ E CHE LA SEGNO DA CHE SI OTTIENE PER $\frac{1}{(n+1)\pi} < t < \frac{1}{n\pi}$ È POSITIVA SE n È PARI, NEGATIVA SE n È DISPARI, PERCHÉ PER $t > 0$ SI HA:

$$\sin \frac{1}{t} \geq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ t.c. } 2k\pi \leq \frac{1}{t} \leq (2k+1)\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \frac{1}{(2k+1)\pi} \leq t \leq \frac{1}{2k\pi}$$

PARTENDO DA QUESTO FATTO VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE $F(x) = O(x^\alpha)$.

1° PASSO

MOSTRIAMO CHE

$$\int_{\frac{1}{(2k+2)\pi}}^{\frac{1}{2k\pi}} \sin \frac{1}{t} dt > 0.$$

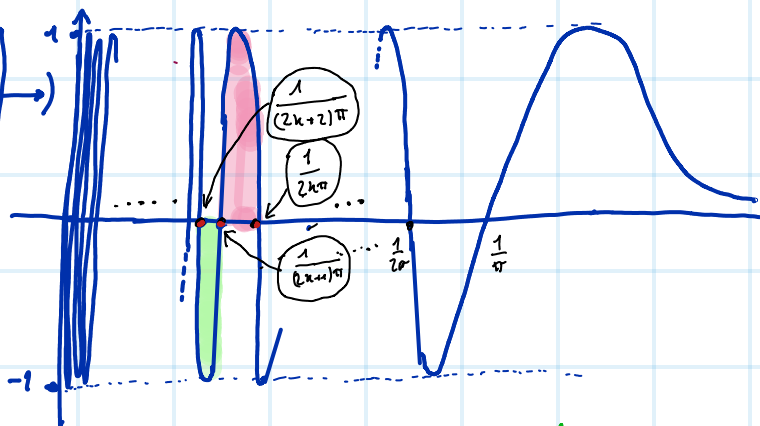
SI HA:

$$\int_{\frac{1}{(2k+2)\pi}}^{\frac{1}{2k\pi}} \sin \frac{1}{t} dt = \int_{(2k+2)\pi}^{2k\pi} (\sin y) \cdot \frac{-1}{y^2} dy = \int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{\sin y}{y^2} dy = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin y}{y^2} dy + \int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{\sin y}{y^2} dy =$$

$$= \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin y}{y^2} dy - \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin y}{(y+\pi)^2} dy = \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} (\sin y) \cdot \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{(y+\pi)^2} \right) dy > 0$$

PERCHÉ SULL'INTERVALLO $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ SI HA $\sin y \geq 0$. INOLTRE $\frac{1}{y^2} > \frac{1}{(y+\pi)^2}$.

CIÒ CHE ABBIAMO APPENA DIMOSTRATO È INTUITIVAMENTE OVVIO (VEDI FIGURA) DELLE 2 SEMI ONDE CHE STANNO TRA $\frac{1}{(2k+2)\pi}$ E $\frac{1}{2k\pi}$ QUELLA POSITIVA È QUELLA CHE STA PIÙ A DESTRA CHE, DELLE 2, È LA PIÙ LARGA. QUINDI LA SOMMA ALGEBRICA DELLE 2 AREE È POSITIVA.



2° PASSO

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO AL 1° PASSO SI DIMOSTRA CHE:

$$\int_{\frac{1}{(2k+2)\pi}}^{\frac{1}{2k\pi}} \sin \frac{1}{t} dt < 0$$

3° PASSO

$$F\left(\frac{1}{n\pi}\right) \begin{cases} > 0 & \text{SE } n \text{ È PARI} \\ < 0 & \text{SE } n \text{ È DISPARI} \end{cases}$$

INFATTI, SE n È PARI, CIOÈ DELLA FORMA $n=2k$, PER OGNI INTERO $m > k$, POSSIAMO SCRIVERE:

$$F\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = F\left(\frac{1}{2k\pi}\right) - F\left(\frac{1}{2m\pi}\right) + F\left(\frac{1}{2m\pi}\right) = \int_{\frac{1}{2m\pi}}^{\frac{1}{2k\pi}} \sin \frac{1}{t} dt + F\left(\frac{1}{2m\pi}\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{2m\pi}}^{\frac{1}{2k\pi}} \sin \frac{1}{t} dt$$

POSTO $a_m = \int_{\frac{1}{2m\pi}}^{\frac{1}{2k\pi}} \sin \frac{1}{t} dt$, SI HA (OVVIAMENTE) $a_k = 0$ E INOLTRE $a_{m+1} > a_m$ PERCHÉ,

$$a_{m+1} - a_m = \int_{\frac{1}{2(m+1)\pi}}^{\frac{1}{2k\pi}} \sin \frac{1}{t} dt - \int_{\frac{1}{2m\pi}}^{\frac{1}{2k\pi}} \sin \frac{1}{t} dt = \int_{\frac{1}{2(m+1)\pi}}^{\frac{1}{2m\pi}} \sin \frac{1}{t} dt > 0$$

PER QUANTO DIMOSTRATO NEL 1° PASSO

PERCHÉ $F(x)$ È CONTINUA E $F(0)=0$

QUINDI (a_n) È UNA SUCCESSIONE CHE TENDE A $F(\frac{1}{2k\pi})$ CRESCENDO STRETTAMENTE E CHE VALE 0 PER $m=k$. POSSIAMO QUINDI CONCLUDERE CHE $F(\frac{1}{2k\pi}) > 0$, CIOÈ CHE $F(\frac{1}{n\pi}) > 0$ QUANDO n È PARI.

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI DIMOSTRA CHE $F(\frac{1}{n\pi}) < 0$ SE n È DISPARI, USANDO IL 2° PASSO AL POSTO DEL 1° PASSO.

4° PASSO PER OGNI $n \in \mathbb{N}$ ESISTE $\bar{x}_n \in (\frac{1}{(n+1)\pi}, \frac{1}{n\pi})$ TALE CHE $F(\bar{x}_n) = 0$.

INFATTI BASTA OSSERVARE CHE F È CONTINUA E CHE $F(\frac{1}{(n+1)\pi})$ E $F(\frac{1}{n\pi})$ HANNO SEGNI OPPOSTI.

5° PASSO MOSTRIAMO CHE SE $0 < x < \frac{1}{\pi}$ SI HA $|F(x)| < 2\pi x^2$.

DATO $x \in (0, \frac{1}{\pi})$ SI PRENDA $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ TALE CHE $\frac{1}{(n+1)\pi} \leq x < \frac{1}{n\pi}$.

GRAZIE AL 4° PASSO SAPPIAMO CHE ESISTE $\bar{x}_n \in (\frac{1}{(n+1)\pi}, \frac{1}{n\pi})$ TALE CHE $F(\bar{x}_n) = 0$.

DI CONSEGUENZA:

PERCHÉ $F(\bar{x}_n) = 0$

PERCHÉ F È LIPSCHITZIANA CON COSTANTE DI LIPSCHITZ 1

PERCHÉ $x, \bar{x}_n \in [\frac{1}{(n+1)\pi}, \frac{1}{n\pi}]$

PERCHÉ SENZA ALLORA $2n \geq n+1$

SEGUE DA b

$$|F(x)| = |F(x) - F(\bar{x}_n)| \leq |x - \bar{x}_n| < \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{(n+1)\pi} = \frac{1}{n(n+1)\pi} \leq \frac{2}{(n+1)^2 \pi} = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{(n+1)\pi}\right)^2 \leq 2\pi x^2$$

6° PASSO DAL 5° PASSO SEGUE SUBITO CHE SE $\alpha < 2$ ALLORA $\frac{F(x)}{x^\alpha} \rightarrow 0$ PER $x \rightarrow 0^+$.

INFATTI BASTA APPLICARE IL TEOREMA DEL CONTRAINTO:

$$0 < \left| \frac{F(x)}{x^\alpha} \right| < \frac{2\pi x^2}{x^\alpha} = 2\pi x^{2-\alpha} \xrightarrow{\text{PERCHÉ } \alpha < 2} 0 \text{ PER } x \rightarrow 0^+$$

7° PASSO SE $\alpha \geq 2$ IL LIMITE NON ESISTE. INFATTI, SIA $G(x) = \frac{F(x)}{x^\alpha}$ E SIAMO DATE LE SUCCESSIONI (a_n) , (b_n) E $(\bar{x}_n)$, DOVE PER OGNI $n \in \mathbb{N}$, $\bar{x}_n$ È IL PUNTO DEFINITO AL 4° PASSO, MENTRE $a_n = \frac{1}{2n\pi}$ E $b_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$. SI HA $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ E $\bar{x}_n \rightarrow 0$.

INOLTRE ANCHE $G(\bar{x}_n) \rightarrow 0$ PERCHÉ, PER OGNI $n \in \mathbb{N}$, SI HA $G(\bar{x}_n) = \frac{F(\bar{x}_n)}{\bar{x}_n^\alpha} = \frac{0}{\bar{x}_n^\alpha} = 0$.

QUESTO SIGNIFICA CHE SE IL LIMITE CERCATO ESISTE, DEVE ESSERE 0.

HA ALLORA DOVREBBE ESSERE ANCHE $G(a_n) \rightarrow 0$ E $G(b_n) \rightarrow 0$, E QUINDI $G(a_n) - G(b_n) \rightarrow 0$.

INVECE SI HA:

$$\begin{aligned} G(a_n) - G(b_n) &= \frac{F(a_n)}{(a_n)^\alpha} + \frac{-F(b_n)}{(b_n)^\alpha} \geq \frac{F(a_n)}{(a_n)^\alpha} + \frac{-F(b_n)}{(a_n)^\alpha} = (2n\pi)^\alpha \cdot \int_{\frac{1}{(2n+1)\pi}}^{\frac{1}{2n\pi}} \frac{1}{t} dt = (2n\pi)^\alpha \cdot \int_{\frac{1}{(2n+1)\pi}}^{\frac{1}{2n\pi}} (\sin s) \cdot \left(-\frac{1}{s^2}\right) ds = \\ &= (2n\pi)^\alpha \cdot \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin s}{s^2} ds > (2n\pi)^\alpha \cdot \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin s}{(2n+1)^2} ds = \frac{(2n\pi)^\alpha}{((2n+1)\pi)^2} \cdot 2 \rightarrow \begin{cases} 2 & \text{SE } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{SE } \alpha > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

QUINDI IL LIMITE NON ESISTE.